

# Ángulos racionales entre vectores en el espacio

Kiran S. Kedlaya

(trabajo conjunto con **Sasha Kolpakov**, **Bjorn Poonen**,  
y **Michael Rubinstein**; vea **arXiv**, **Quanta**)

Department of Mathematics, University of California San Diego\*

La Jolla, California, EE.UU.

kedlaya@ucsd.edu

<http://kskedlaya.org/slides/>

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números (LaTeN)

24 marzo 2021

Apoyo fiscal de: National Science Foundation (DMS-1802161), UC San Diego (Warschawski Professorship).

\* Reconocimiento de tierra: el campus de UC San Diego está situado en la tierra ancestral de la Nación Kumeyaay; los/las Kumeyaay mantienen una presencia importante y próspera en la región. (El topónimo "La Jolla" es de origen Kumeyaay.)

# Tabla de contenido

- 1 La formulación del teorema principal
- 2 Una aplicación a la geometría de tetraedros
- 3 Un bosquejo de la prueba
- 4 ¿Qué sigue?

# La formulación del problema

## Definición

*Una configuración de líneas con ángulos racionales (CLAR) es un conjunto de líneas que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^3$ , con la propiedad de que el ángulo formado por cada par de las líneas es un múltiplo racional de  $\pi$  (o igualmente, un número racional de grados).*

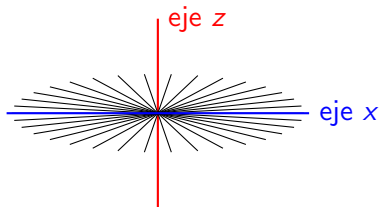
## Problema

*Clasificar todas las CLARes, módulo isometrías de  $\mathbb{R}^3$  que fijan el origen. Es suficiente clasificar CLARes máximas (i.e., CLARes no contenidas en una más grande).*

Por ejemplo, los ejes de coordenadas forman ángulos de  $\frac{\pi}{2}$ , pero esta CLAR no es máxima...

## Una CLAR máxima

La “rueda” de líneas en el plano  $xy$  que forman ángulos racionales con el eje  $x$ , conjunto con el eje  $z$ , constituyen una CLAR.



Ejercicio: demostrar que esta CLAR es máxima.

Veremos que esta es la única CLAR máxima **infinita**.

## Otra CLAR máxima

Consideramos las 15 líneas del centro de un dodecaedro a los puntos medios de las 30 aristas. (Estos son también los puntos medios de las aristas de un icosaedro, y también los vértices de un **icosidodecaedro**.)

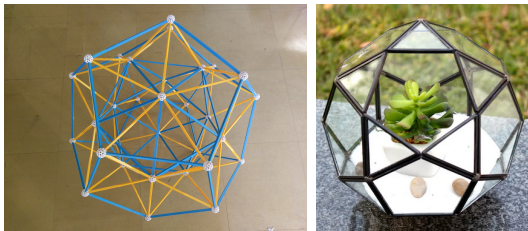


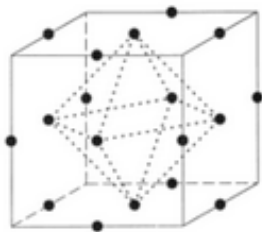
imagen a la derecha de wayfair.com

Ejercicio: demostrar que estas líneas constituyen una CLAR. Todos los ángulos son múltiplos de uno de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{5}$ .

¡Esta CLAR es máxima, pero la demostración no es obvio!

## Otra más CLAR máxima

Consideramos un cubo con vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Formamos las líneas del centro del cubo a los puntos medios de las aristas **y** a los centros de las caras; hay  $(12 + 6)/2 = 9$  líneas distintas en esta configuración.



el sistema de raíces de tipo B3; imagen de Wikimedia Commons

Ejercicio: demostrar que estas líneas constituyen una CLAR. Todos los ángulos son múltiplos de uno de  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ .

¡Otra vez esta CLAR es máxima, y otra vez no es obvio!

## Más CLARes máximas (y ejercicios)

### Ejemplo

*Existe 5 CLARes de 8 líneas, cada una de las cuales contiene 7 diagonales centrales de un 60-gono regular y una línea no ubicada en el mismo plano.*

### Ejemplo

*Existe una infinitud de CLARes de 6 líneas de este tipo: sea  $L_1$  y  $L_2$  dos líneas perpendiculares,  $L_1$  contenido en el plano  $xy$ ,  $L_2$  no; gire alrededor del eje  $z$  por  $\pm \frac{2\pi}{3}$  para obtener  $L_3, \dots, L_6$ .*

### Ejemplo

*Existe una infinitud de CLARes de 6 líneas de este tipo: sea  $L_1, \dots, L_5$  un "abanico" con ángulos de  $\theta$ . Por  $\theta$  en un rango adecuado, existe una línea formando ángulos de  $\theta, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \theta$  con  $L_1, \dots, L_5$ .*

# Un teorema de clasificación

Teorema (KKPR, 2020)

*Los CLARes máximas son clasificados según esta tabla:*

$n$	número de CLARes máximas de $n$ líneas, módulo isometrías
$\aleph_0$	1
15	1
9	1
8	5
6	22 + 5 familias de 1 parámetro
5	29 + 2 familias de 1 parámetro
4	22 + 10 familias de 1 parámetro + 2 familias de 2 parámetros
3	1 familia de 3 parámetros (trivial)



# Tabla de contenido

- 1 La formulación del teorema principal
- 2 Una aplicación a la geometría de tetraedros
- 3 Un bosquejo de la prueba
- 4 ¿Qué sigue?

# Tetraedros con ángulos diedros racionales

## Teorema (Corolario)

*Cada tetraedro en  $\mathbb{R}^3$  con todos ángulos diedros racionales es similar a uno de 59 ejemplos esporádicos (página siguiente) o posee una de las formas*

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi - 2x, \frac{\pi}{3}, x, x\right) \quad \text{con } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\left(\frac{5\pi}{6} - x, \frac{\pi}{6} + x, \frac{2\pi}{3} - x, \frac{2\pi}{3} - x, x, x\right) \quad \text{con } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}.$$

Este teorema resuelve una pregunta de Conway–Jones de 1976.

El vínculo con CLARes: dado un tetraedro como así, escoja un punto en su interior; las líneas pasando por el punto y perpendiculares a las caras forman una CLAR de 4 líneas.

# Los 59 tetraedros esporádicos

Legenda en la página siguiente.

$N$	$(\alpha_{12}, \alpha_{34}, \alpha_{13}, \alpha_{24}, \alpha_{14}, \alpha_{23})$ como múltiplos de $\pi/N$
12	$(3, 4, 3, 4, 6, 8) = H_2(\pi/4)$
24	$(5, 9, 6, 8, 13, 15)$
12	$(3, 6, 4, 6, 4, 6) = T_0$
24	$(7, 11, 7, 13, 8, 12)$
15	$(3, 3, 3, 5, 10, 10) = T_{18}, (2, 4, 4, 4, 10, 10), (3, 3, 4, 4, 9, 11)$
15	$(3, 3, 5, 5, 9, 9) = T_7$
15	$(5, 5, 5, 9, 6, 6) = T_{23}, (3, 7, 6, 6, 7, 7), (4, 8, 5, 5, 7, 7)$
21	$(3, 9, 7, 7, 12, 12), (4, 10, 6, 6, 12, 12), (6, 6, 7, 7, 9, 15)$
30	$(6, 12, 10, 15, 10, 20) = T_{17}, (4, 14, 10, 15, 12, 18)$
60	$(8, 28, 19, 31, 25, 35), (12, 24, 15, 35, 25, 35), (13, 23, 15, 35, 24, 36), (13, 23, 19, 31, 20, 40)$
30	$(6, 18, 10, 10, 15, 15) = T_{13}, (4, 16, 12, 12, 15, 15), (9, 21, 10, 10, 12, 12)$
30	$(6, 6, 10, 12, 15, 20) = T_{16}, (5, 7, 11, 11, 15, 20)$
60	$(7, 17, 20, 24, 35, 35), (7, 17, 22, 22, 33, 37), (10, 14, 17, 27, 35, 35), (12, 12, 17, 27, 33, 37)$
30	$(6, 10, 10, 15, 12, 18) = T_{21}, (5, 11, 10, 15, 13, 17)$
60	$(10, 22, 21, 29, 25, 35), (11, 21, 19, 31, 26, 34), (11, 21, 21, 29, 24, 36), (12, 20, 19, 31, 25, 35)$
30	$(6, 10, 6, 10, 15, 24) = T_6$
60	$(7, 25, 12, 20, 35, 43)$
30	$(6, 12, 6, 12, 15, 20) = T_2$
60	$(12, 24, 13, 23, 29, 41)$
30	$(6, 12, 10, 10, 15, 18) = T_3, (7, 13, 9, 9, 15, 18)$
60	$(12, 24, 17, 23, 33, 33), (14, 26, 15, 21, 33, 33), (15, 21, 20, 20, 27, 39), (17, 23, 18, 18, 27, 39)$
30	$(6, 15, 6, 18, 10, 20) = T_4, (6, 15, 7, 17, 9, 21)$
60	$(9, 33, 14, 34, 21, 39), (9, 33, 15, 33, 20, 40), (11, 31, 12, 36, 21, 39), (11, 31, 15, 33, 18, 42)$
30	$(6, 15, 10, 15, 12, 15) = T_1, (6, 15, 11, 14, 11, 16), (8, 13, 8, 17, 12, 15),$ $(8, 13, 9, 18, 11, 14), (8, 17, 9, 12, 11, 16), (9, 12, 9, 18, 10, 15)$
30	$(10, 12, 10, 12, 15, 12) = T_5$
60	$(19, 25, 20, 24, 29, 25)$

## Legenda por la tabla (página anterior)

Cada tetraedro se presenta como un entero  $N$  y una lista de 6 enteros que representan los ángulos diedros  $\alpha_{12}, \alpha_{34}, \alpha_{13}, \alpha_{24}, \alpha_{14}, \alpha_{23}$  como múltiplos de  $\frac{\pi}{N}$ . (Aquí  $\alpha_{ij}$  significa el ángulo entre **caras**  $i$  y  $j$ .)

Las etiquetas adicionales  $H_2(\pi/4), T_0, \dots$  indican ejemplos de tetraedros que aparecen en la literatura como ejemplos de tetraedros **rectificables**. Ellos provienen de CLARes de 4 líneas contenidas en las CLARes maximas de 9 y 15 líneas (derivados del icosidodecaedro y el sistema de raíces B3).

Las líneas horizontales separan las órbitas de un grupo de simetría “misterioso” ...

## Tetraedros rectificables

En  $\mathbb{R}^2$ , dos polígonos con la misma área son **equivalente por disección (scissors-congruent)**: podemos cortar uno en un número finito de piezas y ensamblarlas en el otro.



imagen de Wikimedia Commons

¡Esto falla en  $\mathbb{R}^3$ ! En 1901, Dehn construyó un invariante<sup>\*\*</sup> para esta equivalencia; es 0 por un cubo y no 0 por un tetraedro regular.

Circa 1960, Sydler demostró que dos poliedros con volumen y invariante de Dehn iguales son equivalentes por disección. Entonces, cada tetraedro con invariante 0 es **rectificable** (equiv. por disección a un cubo).

<sup>\*\*</sup>  $\sum_e l_e \otimes \alpha_e \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Q}$  sobre aristas ( $l_e$  = longitud,  $\alpha_e$  = ángulo diedro).

## Tetraedros rectificables (continuación)

La pregunta de Conway–Jones fue motivado por el deseo de clasificar tetraedros rectificables: cada tetraedro con ángulos diedros racionales tiene invariante de Dehn 0, y por tanto es rectificable.

Más motivación: en 1980, Debrunner demostró que cada tetraedra que rellena  $\mathbb{R}^3$  es rectificable. Esto da una nueva demostración que no se puede rellenar  $\mathbb{R}^3$  con tetraedros regulares (como fue afirmado falsamente por Aristóteles). De hecho, no conozco otro método para demostrar que un tetraedro particular no rellena  $\mathbb{R}^3$ .

No sé ni cómo clasificar tetraedros rectificables, ni cómo obtener ningún resultado de finitud (incluyendo algunas familias paramétricas). Sin embargo, además de los tetraedros con ángulos diedros racionales, tal vez hay otras subclases de los tetraedros rectificables que se pueden clasificar...

## La simetría de Regge

En los años 1960, dos físicos, que estudiaban el momento angular en mecánica cuántica, descubrieron un hecho milagroso sobre tetraedros.

### Teorema (Ponzano–Regge)

*Para cada tetraedro con aristas  $(l_{12}, l_{34}, l_{13}, l_{24}, l_{14}, l_{23})$  y ángulos diedros  $(\alpha_{12}, \alpha_{34}, \alpha_{13}, \alpha_{24}, \alpha_{14}, \alpha_{23})$ , existe un tetraedro con aristas*

$$(l_{12}, l_{34}, s - l_{13}, s - l_{24}, s - l_{14}, s - l_{23}), \quad s = \frac{1}{2}(l_{13} + l_{24} + l_{14} + l_{23})$$

*y ángulos diedros*

$$(\alpha_{12}, \alpha_{34}, \sigma - \alpha_{13}, \sigma - \alpha_{24}, \sigma - \alpha_{14}, \sigma - \alpha_{23}), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\alpha_{13} + \alpha_{24} + \alpha_{14} + \alpha_{23}).$$

En 1999, Justin Roberts (¡mi colega!) observó que los dos tetraedros tienen el mismo invariante de Dehn.

## Consecuencias de la simetría de Regge

La familia de tetraedros con ángulos diedros  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi - 2x, \frac{\pi}{3}, x, x)$  fue descubierto por Hill en 1895. La simetría de Regge produce la familia  $(\frac{5\pi}{6} - x, \frac{\pi}{6} + x, \frac{2\pi}{3} - x, \frac{2\pi}{3} - x, x, x)$ .

Junto con la acción de  $S_4$  en las caras, la simetría de Regge genera un grupo más grande que actúa sobre clases de isomorfismo de tetraedros. Nuestra tabla de tetraedros esporádicos indica las órbitas para este grupo “misterioso”.

En particular, con 3 excepciones, todos los tetraedros esporádicos son “explicados” por los ejemplos clásicos (que provienen de las CLARes de 9 y 15 líneas) a través de este grupo de simetría.



# Tabla de contenido

- 1 La formulación del teorema principal
- 2 Una aplicación a la geometría de tetraedros
- 3 Un bosquejo de la prueba
- 4 ¿Qué sigue?

## El lugar de la computadora en la prueba matemática

La prueba del teorema hace un uso intensivo de cálculos por computadora. Esto lo coloca en la misma categoría que algunos resultados anteriores.

- El **teorema de las 4 colores** (Appel–Haken, Robertson–Seymour): cada grafo plano tiene número cromático  $\leq 4$ .
- La **conjetura de Kepler** (Hales–Ferguson): los empaques optimales de esferas en  $\mathbb{R}^3$ .
- El **problema del algoritmo de Dios** (Rokicki et al.): cada posición del cubo de Rubik tiene una solución en  $\leq 20$  movimientos.
- El problema de Graham sobre **triples booleanos pitagóricos** (Heule–Kullmann–Marek): en cada coloración de los enteros positivos con 2 colores, existe un triple pitagórico monocromático.

Es importante distinguir entre un cálculo que **encuentra** la respuesta correcta y uno que **da la prueba**. ¡Usamos el primero como parte del segundo!

## Algunos puntos sutiles

Algunos problemas surgen en este prueba asistada por computadora:

- Dado que nuestros programas son partes de la prueba, debemos documentarlos y ponerlos a disposición del público. Usamos **cuadernos de Jupyter** para presentar parte de nuestro código.
- Parte del código (escrito en C) usa aritmética de punto flotante. Para hacerlo riguroso, debemos estimar los errores de redondeo.
- Parte del código (escrito en Sage) dependía de características que aún no existían. Enviamos algo de código a Sage (y también unas correcciones de bugs).
- Parte del código está escrito en Magma, que no es un sistema de código abierto. Debemos documentar este código especialmente bien, para que pueda ser portado a otro sistema.
- Debemos escribir el código con cuidado, para que termine en un período de tiempo razonable ( $\leq$  una semana en una CPU).

## Cómo encontrar CLARes de 4 líneas

La principal dificultad es clasificar CLARes de 4 líneas. Para encontrar las más grandes, comenzamos con cada CLAR de 4 líneas, luego repetidamente tratamos de extenderla para que cada subconjunto de 4 líneas esté en la lista original.

Para encontrar CLARes de 4 líneas, primero clasificamos tuplas de 6 ángulos  $(\theta_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$  que satisfacen esta condición:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{14} \\ \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{24} \\ \cos \theta_{13} & \cos \theta_{23} & 1 & \cos \theta_{34} \\ \cos \theta_{14} & \cos \theta_{24} & \cos \theta_{34} & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

La prueba que es necesaria: elija vectores unitarios a lo largo de las líneas  $L_1, \dots, L_4$  y haga la matriz  $3 \times 4$   $A$  con esos vectores como columnas. Entonces  $A$  tiene rango  $\leq 3$  y  $A^T A$  es la matriz de arriba.

# Una traducción algebraica

Por  $z_{jk} = e^{i\theta_{jk}}$ , podemos reescribir esta condición como

$$\det \begin{pmatrix} 2 & z_{12} + z_{12}^{-1} & z_{13} + z_{13}^{-1} & z_{14} + z_{14}^{-1} \\ z_{12} + z_{12}^{-1} & 2 & z_{23} + z_{23}^{-1} & z_{24} + z_{24}^{-1} \\ z_{13} + z_{13}^{-1} & z_{23} + z_{23}^{-1} & 2 & z_{34} + z_{34}^{-1} \\ z_{14} + z_{14}^{-1} & z_{24} + z_{24}^{-1} & z_{34} + z_{34}^{-1} & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Este es un polinomio de Laurent en los 6 variables  $z_{jk}$ , que queremos resolver en raíces de 1. Esta es una clase de problemas con aplicaciones a muchas ramas de matemáticas: geometría euclidiana y no euclidiana, teoría de grupos finitos, teoría de nudos, álgebras de operadores, teoría de grafos, sistemas dinámicos....

## Un enfoque a través de relaciones ciclotómicas

En principio, es posible resolver estos problemas por clasificar todas las formas en que un número fijo de raíces de 1 suma a 0. Por ejemplo, si  $\zeta_1, \dots, \zeta_6$  son raíces de 1 que suman a 0, entonces:

- cancelan en pares;
- forman dos triples, cada de la forma  $\zeta, e^{2\pi i/3}\zeta, e^{4\pi i/3}\zeta$  por algún  $\zeta$ ;
- o tienen la forma  $-\zeta e^{2\pi i/3}, -\zeta e^{4\pi i/3}, \zeta e^{2\pi i/5}, \zeta e^{4\pi i/5}, \zeta e^{6\pi i/5}, \zeta e^{8\pi i/5}$  por algún  $\zeta$ .

(Ejercicio: ¡pruébelo!)

Esta clasificación se conoce por hasta 12 raíces de 1 (trabajo de Mann, Włodarski, Conway–Jones, Poonen–Rubinstein). Sin embargo, nuestra ecuación es una suma de 105 monomios, así que esto no es útil de inmediato.

## Un enfoque a través del álgebra conmutativa

Otro enfoque usa álgebra conmutativa. Dado el polinomio inicial, se puede usar la teoría de Galois para generar nuevos polinomios que tengan las mismas soluciones en raíces de 1, luego resuelva un sistema de polinomios (e.g., por bases de Groebner).

Por ejemplo, dado un polinomio de Laurent  $f(x, y)$  sobre  $\mathbb{Q}$ , cada solución de  $f(x, y) = 0$  en raíces de 1 es también una solución de uno de:

$$f(x, -y), f(-x, y), f(-x, -y), \\ f(x^2, y^2), f(x^2, -y^2), f(-x^2, y^2), f(-x^2, -y^2).$$

Ejercicio: ¡pruébelo! (Indicación: separar casos según los exponentes de  $x$  e  $y$  en el grupo de raíces de 1.)

En la práctica, este enfoque funciona muy bien en 2 variables, apenas en 3 variables, y no hace nada en 4 o más variables.

## Relaciones ciclotómicas mod 2

Introducimos un tercer enfoque: clasificamos relaciones entre raíces de 1 módulo 2 (en el anillo de enteros algebraicos). Por ejemplo, si  $\zeta_1, \dots, \zeta_6$  son raíces de 1 que suman a 0 mod 2, entonces:

- cancelan en pares (módulo signos);
- forman dos triples, cada de la forma  $\pm\zeta, \pm e^{2\pi i/3}\zeta, \pm e^{4\pi i/3}\zeta$  por algún  $\zeta$ ;
- o tienen la forma (por algún  $\zeta$ )  
 $\pm\zeta e^{2\pi i/3}, \pm\zeta e^{4\pi i/3}, \pm\zeta e^{2\pi i/5}, \pm\zeta e^{4\pi i/5}, \pm\zeta e^{6\pi i/5}, \pm\zeta e^{8\pi i/5}$ .

Esto ayuda porque nuestra ecuación reduce mod 2 a un polinomio de Laurent con solo 12 monomios:

$$z_{12}^2 z_{34}^2 + z_{12}^{-2} z_{34}^{-2} + z_{12}^2 z_{34}^{-2} + z_{12}^{-2} z_{34}^2 + \dots$$

y esto está en en rango que podemos manejar (siguiendo a Poonen–Rubin).



## La estrategia

Ahora clasificamos las CLARes de 4 líneas como así:

- Hacemos un cálculo en C para encontrar soluciones con denominador pequeño (hasta 420), descartando las de familias paramétricas conocidas. Esto encuentra una clasificación putativa **y** hace un paso clave en la prueba.
- Anotamos todas las relaciones mod 2 entre los 12 monomios que persisten.
- Para cada relación, hacemos un sistema de ecuaciones que imponga estas relaciones **y** la ecuación original.
- Usamos simetrías de Regge para reducir el número de sistemas (hasta unos pocos cientos).
- Resolvemos estos sistemas usando el método de álgebra conmutativa. Para ahorrar tiempo, para soluciones aisladas, solo verificamos que sus denominadores estén en el rango cubierto por el código en C.
- Para las soluciones paramétricas en raíces de 1, las convertimos de nuevo en ángulos para confirmar nuestra conjetura.

# Tabla de contenido

- 1 La formulación del teorema principal
- 2 Una aplicación a la geometría de tetraedros
- 3 Un bosquejo de la prueba
- 4 ¿Qué sigue?

## Más sobre tetraedros rectificables

Este enfoque no permite clasificar todos los tetraedros rectificables, pero podemos identificar algunas formas que podrían manipularse.

Por ejemplo, si un tetraedro tiene aristas  $\ell_{ij}$  y ángulos diedros  $\alpha_{ij}$ ;

- las aristas  $\ell_{12}$  y  $\ell_{13}$  son iguales;
- los ángulos  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{13}$  suman a un múltiplo racional de  $\pi$ ;
- y los otros 4 ángulos diedros son múltiplos racionales de  $\pi$ ;

entonces el tetraedro es rectificable. Debería ser factible clasificarlos; ya se conocen algunos ejemplos de la literatura clásica.

También podría ser posible demostrar un teorema de finitud usando ideas de lógica matemática (**o-minimidad**), pero esto (probablemente) sería **ineficaz**: no sería dar un algoritmo para encontrar todas las soluciones con prueba.

## ¿Qué hay de $\mathbb{R}^4$ ?

Se conocen ejemplos de símplices en  $\mathbb{R}^n$  con ángulos diedros racionales por cada  $n \geq 4$  (Maehara–Martini). ¿Es posible clasificarlos por  $n = 4$ ?

Con nuestras técnicas, pienso que no: el análogo de nuestra ecuación es un polinomio en 10 variables con 604 monomios, sin estructura útil mod 2.

Pero hay otras técnicas que podrían ser útiles, particularmente del álgebra conmutativa (e.g., **continuación de homotopía numérica**).